

IDEAS FUNDAMENTALES

- Definición de límite
 - Topológica $\rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \Leftrightarrow \forall U \in \mathcal{V}(b) \exists V \in \mathcal{V}(a) \text{ tal que } f(V) \subseteq U \text{ para todo } a \in V$
 - Analítica $\rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ tal que si } |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$
 - Secuencial $\rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \Leftrightarrow \forall x_n \rightarrow a \text{ se tiene que } f(x_n) \rightarrow b$

- Límites infinitos
 - $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ si $\forall M > 0, \exists \delta > 0$: si $|x - a| < \delta$, entonces $f(x) > M$
 - $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ si $\forall N > 0, \exists \delta > 0$: si $|x - a| < \delta$, entonces $f(x) < -N$

- Límites en el infinito
 - $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$ si $\forall \varepsilon > 0, \exists M > 0$: si $x > M$, entonces $|f(x) - b| < \varepsilon$
 - $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$ si $\forall \varepsilon > 0, \exists N < 0$: si $x < N$, entonces $|f(x) - b| < \varepsilon$

- Límites laterales
 - $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = b \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$: si $0 < x - a < \delta$, entonces $|f(x) - b| < \varepsilon$
 - $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = c \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$: si $0 < a - x < \delta$, entonces $|f(x) - c| < \varepsilon$

- Operaciones con límites
 - Suma $\rightarrow \lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x)$
 - Producto $\rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x)$
 - Cociente $\rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$
 - Potencia $\rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x)^{g(x)} = \left(\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right)^{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$

- Cálculo de límites
 - Indeterminaciones $\rightarrow$

0/0	∞/∞	$0 \cdot \infty$	$\infty - \infty$	0^0	∞^0	1^∞
-----	-----------------	------------------	-------------------	-------	------------	------------
 - 0/0 $\rightarrow$ - Para resolver esta indeterminación basta descomponer en factores el numerador y el denominador y simplificarlos.
 - ∞/∞ $\rightarrow$ - Para resolver este tipo de indeterminaciones basta dividir el numerador y el denominador por la potencia máxima de x que aparezca en el denominador.
Este proceso sigue siendo válido cuando $x \rightarrow -\infty$.
 - Límites de funciones irracionales $\rightarrow$ - Cuando tengamos funciones con radicales y aparezcan indeterminaciones de la forma 0/0 ó $\infty - \infty$, para resolverlas, basta multiplicar y dividir por el conjugado.

IDEAS FUNDAMENTALES

- **Definición de función continua** → Una función f es continua en un punto a si existen los límites laterales en dicho punto, son iguales e iguales al valor de la función en el punto.

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$$

- **Discontinuidades**
 - **Evitable** → Existen los límites laterales, son iguales pero no coinciden con el valor de la función en el punto o bien la función no está definida en dicho punto.
 - **De salto** → Existen los límites laterales pero son distintos. Se llama salto a la diferencia (en valor absoluto) de los límites laterales.
 - **Esencial** → No existe alguno de los límites laterales o ninguno de los dos.

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \neq f(a)$$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$$

- **Propiedades**
 - **Conservación del signo** → Si una función es continua en un punto a de forma que $f(a) \neq 0$, entonces existe un entorno del punto a en el cual la función tiene signo constante; de hecho tiene el mismo signo que $f(a)$.
 - **Acotación de funciones continuas** → Sea f una función continua en un punto a . Entonces existe un entorno del punto a en el cual f está acotada.

- **Teoremas fundamentales**
 - **Teorema de Bolzano** → Si una función f es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ y cambia de signo en los extremos de dicho intervalo, es decir $f(a) \cdot f(b) < 0$, entonces existe, al menos, un punto c perteneciente al intervalo abierto (a, b) donde la función se anula, esto es $f(c) = 0$.
 - **Teorema del valor intermedio** → Sea f una función continua en un intervalo $[a, b]$ tal que $f(a) \neq f(b)$. Entonces f toma cualquier valor k comprendido entre $f(a)$ y $f(b)$ por lo menos una vez en un punto interior de (a, b) , es decir, existe al menos un valor $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = k$.
 - **Teorema de Weierstrass** → Si f es una función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$, entonces alcanza en este intervalo un máximo y un mínimo absolutos.

