ACTIVIDADES LÍMITES

1. Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x^3 - 2x^2 - 5x + 10}$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{-6}$

c) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3 + 4x^2 + 4x}{x^3 + 3x^2 - 4}$

d) $\lim\limits_{x \to \infty} 3x^6$

e) $\lim\limits_{x \to 0^+} \left(\dfrac{4}{x^5}\right)$

f) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{x^{-4}}{3}\right)$

g) $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{3}{x^3 - 1} - \dfrac{1}{x - 1}\right)$

h) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{\sqrt{x + 6} - 3}{x^2 - 2x - 3}$

i) $\lim\limits_{x \to 0^-} \left(\dfrac{x^7}{5}\right)$

$\lim\limits_{x \to 3} \left[\dfrac{x^3 - 9}{x + 2} \cdot \dfrac{x^3 + 9}{x^3 - 3x}\right]$

k) $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{1}{x - 1} - \dfrac{3}{1 - x^3}\right)$

l) $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{3x + 4}{2x + 5}\right)^{3/x - 1}$

m) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{4}{x^2 + 5} + \dfrac{5}{x + 8}\right)$

n) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{4}{x^3}\right)$

ñ) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{3x + 1}{x^2} - \dfrac{3}{x}\right)$

o) $\lim\limits_{x \to +\infty} 5^{-x}$

p) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^5}{\sqrt{x^4 - 3}}$

q) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{5}{3}\right)^x$

r) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{5x^3 - 3x^2 + 5}{3x^3 + 2x^2 - 3x + 1}$

s) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 + 3x} - \sqrt{x^2 + 1}\right)$

t) $\lim\limits_{x \to 2} \left(\dfrac{1}{\sqrt{x - 2}} - \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 4}}\right)$

u) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{2x^2 - 3} \cdot (4x + 2)$

v) $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{4x^2 - 4x - 8}{x^2 - 3x + 2}$

w) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1 + x^3}{1 - x^3} - \dfrac{1 + x^2}{1 - x^2}$

x) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{x - 2}}{\sqrt{x + 7} - 3}$

y) $\lim\limits_{x \to 2} \left[\dfrac{x + 5}{x + 3}\right]^{\left[\frac{x^2 - 4}{\sqrt{2x} - 2}\right]}$

z) $\lim\limits_{x \to 0} \left(1 + \dfrac{x}{2x + 1}\right)^{2/x}$

Im) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{3x + 1}{x - 1} - \dfrac{2x - 1}{x^2 - 1}$

In) $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{\sqrt{x - 1}}{x - 1}$

Iñ) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{5x^3 - 3}{5x^3 + x}\right)^{x^2 - 1}$

Io) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{\sqrt{x + 2} - 2}$

2. Calcula los valores del parámetro k para que se verifiquen las siguientes igualdades:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3kx^3 - 5x + 1}{10x^3 + 5} = -1$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[\sqrt{x^2 + kx + 1} - x\right] = 2$

3. Calcula los límites laterales de las siguientes funciones en los puntos que se indican:

a) $f(x) = \begin{cases} 1 - x, & \text{si } x \leqslant 0 \\ x, & \text{si } x > 0 \end{cases}$ en el punto $x = 0$

b) $f(x) = \begin{cases} e^x, & \text{si } x \leqslant 0 \\ 1 - 2x, & \text{si } 0 < x \leqslant 1 \\ x^2, & \text{si } x > 1 \end{cases}$ en $x = 0$ y $x = 1$

c) $f(x) = |x - 5|$ en el punto $x = 5$

d) $f(x) = |x| - \dfrac{x}{x + 1}$ en el punto $x = 0$

En cada uno de los casos anteriores, explicar si existe el límite en los puntos indicados.

4. Da un ejemplo de una función que esté definida para todo x que no tenga límite cuando x tienda a 2.

5. Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x \leqslant 1 \\ ax + 3 & \text{si } 1 < x \leqslant 2 \\ bx^3 - 2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

calcula los valores de a y b para que existan los límites:

$$\lim_{x \to 1} f(x) \text{ y } \lim_{x \to 2} f(x)$$

ACTIVIDADES CONTINUIDAD

1. Estudiar la continuidad de las siguientes funciones indicando, cuando proceda, el tipo de discontinuidad:

a) $f(x) = \begin{cases} -2 \text{ si } x < -2 \\ -x^2 + 4 \text{ si } -2 \leq x \leq 2 \\ 2 \text{ si } x > 2 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} 2 - x^2 \text{ si } x \leq 1 \\ 1 - 2x \text{ si } x > 1 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} 2x - 1 \text{ si } x > -1 \\ 3 \text{ si } x \leq -1 \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} \text{ si } x < 1 \\ \sqrt{x+1} \text{ si } x \geq 1 \end{cases}$

e) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 \text{ si } x \leq 0 \\ 2x - 3 \text{ si } x > 0 \end{cases}$

f) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^2 + 3x - 2}{2x^2 - 5x + 2} \text{ si } x \neq 1/2 \\ -\dfrac{5}{3} \text{ si } x = 1/2 \end{cases}$

2. Determinar los valores que deben tomar los parámetros *a* y *b* para que las siguientes funciones sean continuas:

a) $f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x \leq 1 \\ 3 - ax^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 1 & \text{si } x < 0 \\ ax + b & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} sen\, x & \text{si } x \leq 0 \\ -x^2 + ax + b & \text{si } x > 0 \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x < 0 \\ ax + b & \text{si } 0 \leq x \leq 3 \\ x - 5 & \text{si } x > 3 \end{cases}$

e) $f(x) = \begin{cases} 3 - ax^2 & \text{si } x \leq 1 \\ \dfrac{2}{ax} & \text{si } x > 1 \end{cases}$

3. La función:

$$f(x) = \frac{x^3 + x^2 + x + a}{x - 1}$$

no está definida en el punto $x = 1$. Hallar el valor del parámetro a para que sea posible definir el valor de $f(1)$ de forma que f sea continua.

4. Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} -1 \text{ si } x \leq 0 \\ 2x^3 - 1 \text{ si } x > 0 \end{cases}$$

Estudiar si verifica el teorema de Bolzano en el intervalo [–1, 1]. En caso afirmativo, aplicar el teorema.

5. Demostrar que la ecuación $7^x = 8x$ tiene alguna solución en el intervalo [0 , 1]

6. Responde a las siguientes cuestiones justificando las respuestas:

a) Si $f(a) = 5$ y $f(b) = 1$, ¿existe algún $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = 3$?

b) De una función se sabe que tiene tres raíces en el intervalo [–4, 2] y que toma valores de igual signo en los extremos. ¿Es esto posible?

En caso afirmativo, construye un ejemplo.

c) La función $f(x) = 1/x$ ¿es continua en todo su dominio?

En caso afirmativo, explicar la aparente contradicción de continuidad e inexistencia de máximo y mínimo.

7. Estudiar la continuidad de la función:

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + k}$$

para los distintos valores del parámetro *k*.

8. Demuestra que existe algún número real entre 0 y 1 para el cual se verifica la siguiente igualdad:

$$x = \frac{1}{x^2 + 1}$$

9. Determinar los valores que debe tomar el parámetro a para que la función:

$$f(x) = \frac{x^2 - a}{x^3 + x^2 + ax - 12}$$

presente una discontinuidad evitable en el punto $x = 2$.

10 Probar que la ecuación:

$$2x + \text{sen } x = 1$$

tiene alguna solución real.

11. Calcular los valores de los parámetros a y b para que la función:

$$f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{si } -\pi \leqslant x \leqslant 0 \\ a + x^2 & \text{si } 0 < x < 1 \\ \frac{b}{x} & \text{si } 1 \leqslant x \leqslant \pi \end{cases}$$

verifique las hipótesis del teorema de Bolzano en el intervalo $[-\pi, \pi]$. Aplicar el teorema.

12. Si f(x) es una función continua en el intervalo [1 , 9] y es tal que f(1) = -5 y f(9) >0 , ¿podemos asegurar en estas condiciones que la función g(x) = f(x) + 3 tiene al menos un cero en el intervalo [1 , 9] ?

13. Estudiar la continuidad de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

b) $f(x) = \dfrac{|x-1|}{x-1}$

14. Completar:

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2}$$

en $x = 2$, a fin de salvar la discontinuidad evitable que presenta en dicho punto.

15. Estudiar las discontinuidades de:

$$f(x) = e^{1/x-1}$$

en $x = 1$.

16. Sea la función:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x > 0 \\ 1 - x & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$$

¿Es continua en todo R?