

IDEAS FUNDAMENTALES

• Derivada de una función en un punto a $\longrightarrow$ $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$

• La función f es derivable en un conjunto A cuando es derivable en todos los puntos del conjunto A .

• Derivadas laterales $\begin{cases} f'_+(a) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \\ f'_-(a) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \end{cases} \longrightarrow$ Una función es derivable en un punto, si y sólo si, existen sus derivadas laterales y coinciden.

• Recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto a $\longrightarrow$ $y - f(a) = f'(a)(x - a)$

• Recta normal a la curva $y = f(x)$ en el punto a $\longrightarrow$ $y - f(a) = -\frac{1}{f'(a)}(x - a)$

• Reglas de derivación

- La derivada de una constante es cero. $\longrightarrow$ Si $f(x) = c \Rightarrow f'(x) = 0$
- La derivada de una suma es la suma de las derivadas. $\longrightarrow$ $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$
- La derivada de un producto es igual a la derivada de la primera por la segunda sin derivar más la primera sin derivar por la derivada de la segunda. $\longrightarrow$ $(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + g'(x) \cdot f(x)$
- La derivada de un cociente es igual a la derivada del numerador por el denominador sin derivar menos el numerador por la derivada del denominador dividido por el denominador al cuadrado. $\longrightarrow$ $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - g'(x) \cdot f(x)}{g(x)^2}$
- La derivada de una composición: regla de la cadena. $\longrightarrow$ $(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$

Diferencial de Una función

- $\longrightarrow$ Variación de la función $\longrightarrow \Delta f = f'(x_0) \cdot h$
- $\longrightarrow$ Aproximación de un valor $\longrightarrow f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot h$

IDEAS FUNDAMENTALES

- **Crecimiento y decrecimiento**
 - Una función f es **creciente** en I cuando $f(x) < f(y) \forall x, y \in I$; f es creciente $\Leftrightarrow f'(x) > 0 \forall x \in I$.
 - Una función f es **decreciente** en I cuando $f(x) > f(y) \forall x, y \in I$; f es decreciente $\Leftrightarrow f'(x) < 0 \forall x \in I$.
 - Si f es derivable en $x = a$, entonces es **creciente** en a (respectivamente decreciente) $\Leftrightarrow f'(a) > 0$ (respectivamente $f'(a) < 0$)

- **Extremos relativos**
 - Puntos singulares: puntos que anulan la primera derivada.
 - Derivada segunda.
 - Pasos a seguir
 - Signo de la segunda derivada en los puntos singulares
 - Si $f''(a) > 0$, tenemos un **mínimo relativo**.
 - Si $f''(a) < 0$, tenemos un **máximo relativo**.
 - Si $f''(a) = 0$, se busca la primera derivada que no se anule en el punto a , $f^{(n)}(a) \neq 0$:
 - Si n es impar, no hay extremo.
 - Si n es par y $f^{(n)}(a) > 0$, hay un **mínimo relativo**.
 - Si n es par y $f^{(n)}(a) < 0$, hay un **máximo relativo**.

- **Concavidad y convexidad**
 - Una función es **convexa** cuando la tangente a la función está por debajo de la gráfica de la función. Y es **cóncava** cuando está por encima.
 - Si f es dos veces derivable en $x = a$ y la derivada segunda es continua en dicho punto, entonces:
 - Si $f''(a) > 0 \Rightarrow f$ es **convexa**.
 - Si $f''(a) < 0 \Rightarrow f$ es **cóncava**.
 - Punto de inflexión
 - Es aquel en el cual la función pasa de ser cóncava a convexa o viceversa.
 - Si $f''(a) = 0$ y $f'''(a) \neq 0$, en a hay un **punto de inflexión**.

- Problemas de optimización
 - Definir la función a optimizar
 - Derivar y buscar los puntos candidatos
 - Comprobar con la segunda derivada que es máximo o mínimo