EJERCICIOS DERIVADAS Y APLICACIONES

1. Utilizando la definición de derivada, calcular las derivadas de las siguientes funciones en los puntos que se indican:

a) $f(x) = x^2 - 2x$ en $x = 2$.

b) $g(x) = 2x^3 - 1$ en $x = 0$.

c) $h(x) = 2/(x - 1)$ en $x = 2$.

2. Calcular las ecuaciones de las rectas tangente y normal a las siguientes curvas en los puntos que se indican:

a) $f(x) = 2x^2 + x$ en $x = 1$.

b) $g(x) = 1/x$ en $x = 1$.

c) $h(x) = 1/(x + 1)$ en $x = 0$.

3. Hallar los puntos en los cuales las tangentes a la curva:

$$y = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 20$$

sean paralelas al eje de abscisas.

4. Estudiar si existe algún punto en el cual la tangente a la curva:

$$y = x^2 - 7x + 3$$

es paralela a la recta $5x + y - 3 = 0$.

5. Dada la parábola $y = x^2 + ax + b$, calcular los valores de los parámetros a y b para que sea tangente a la recta $y = x$ en el punto (1, 1).

6. Estudiar la derivabilidad de las funciones:

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{si } x \geq 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} sen\, x & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 - x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

$$h(x) = \begin{cases} sen\, x & \text{si } x \geq \pi \\ 1 + cos\, x & \text{si } x < \pi \end{cases}$$

7. Estudiar la derivabilidad de las funciones:

a) $f(x) = |2x + 1|$ b) $f(x) = 1 + |x - 1|$

c) $f(x) = |x^2 - x - 6|$

8. Calcular los valores de los parámetros a y b para que la siguiente función sea continua y derivable en el punto $x = 0$:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x + ab} & \text{si } x > 0 \\ x^2 + ax + b & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

9. Calcular las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = \sqrt{x e^x + x}$ b) $y = Ln(sen\, 2x)$

c) $y = \sqrt{\dfrac{3 - sen\, x - 2\cos x}{5x}}$

d) $y = Ln\sqrt{\dfrac{1 + sen\, x}{1 - sen\, x}}$ e) $y = 3^{\frac{sen\, ax}{cos\, ax}}$

f) $y = Ln\left(\dfrac{\sqrt{2x + 1}}{2^x}\right)$ g) $y = sen(cos 2^x)$

h) $y = \sqrt[3]{\dfrac{Ln\, x}{cos\, x}}$ i) $y = \sqrt[4]{\dfrac{x + 1}{1 - x^2}}$

j) $y = \sqrt[3]{sen\, x \cdot 2^x}$ k) $y = a^x \cdot e^{ax}$

10. Consideremos la siguiente función:

$$f(x) = \frac{x + 1}{x - 1}$$

Se pide:

a) Hallar su derivada.

b) Calcular la ecuación de la recta tangente a f en el punto $x = 2$.

c) ¿Existe algún punto de la gráfica de f en el cual la tangente forme un ángulo de 45° con el eje OX?

d) ¿Y algún punto en el que la tangente sea paralela al eje OX?

11. Estudiar la derivabilidad de la función:

$$f(x) = \begin{cases} 1 - 2x^2 & \text{si } x \leq 0 \\ 2x^2 + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

12. Un balón tiene un radio de 15 cm. Un día caluroso se ha dilatado y su radio se ha incrementado en 0,2 mm. Determina, de forma aproximada, el aumento de su volumen.

13. El radio de una esfera vale inicialmente cero, y crece a partir de ese momento a la velocidad de 5 cm/s. Hallar la velocidad de crecimiento de la superficie de la esfera y de su volumen en el instante en que el radio vale 50 cm.

(Nota: superficie: $4\pi r^2$; volumen: $(4\pi r^3)/3$).

14. ¿Qué aumento experimenta el volumen de un cubo de 2 metros de lado cuando se dilata su lado 2 milímetros?

15. Se considera la función f definida por:

$$f(x) = \frac{1}{2}x|x|$$

Se pide:

a) Calcular las derivadas por la derecha y por la izquierda en el punto $x = 0$
b) ¿Es derivable f en dicho punto?
c) Hallar la función derivada indicando su dominio.

16. Determinar los puntos de la función:

$$f(x) = x^2 - 5x + 6$$

en los que la tangente a f forma ángulos iguales con los ejes de coordenadas.

17. Calcular los puntos en los que la tangente a:

$$y = \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x + 1$$

es:

a) Paralela a OX.

b) Paralela a $y = 5x + 3$.

c) Perpendicular a $y = \frac{1}{3}x + 1$.

18. Estudiar la derivabilidad de la siguiente función:

$$f(x) = x^2 - |x| + 2$$

19. Estudiar la derivabilidad de la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}\frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

20 Estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de las siguientes funciones:

a) $f(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$

b) $h(x) = (x^2 - 1)/x$

c) $k(x) = Ln(x^2 - 1)$

d) $m(x) = (2x^2 - 1)^{1/2}$

e) $n(x) = e^{1/x}$

21 Estudiar el crecimiento y decrecimiento de las siguientes funciones en los puntos que se indican:

a) $f(x) = 3x^2 - x - 1$ en $x = 1$

b) $g(x) = x/(x^3 - 1)$ en $x = 0$

c) $h(x) = 2x\,e^2$ en $x = 1$

d) $k(x) = \cos 3x^2$ en $x = 2$

22. Representa gráficamente las siguientes funciones:

a) $f(x) = 2x^3 - x^2 - 1$

b) $f(x) = \frac{x^2}{2x - 1}$

c) $f(x) = \frac{1}{(x-1)^3}$

d) $f(x) = e^{2x} - x$

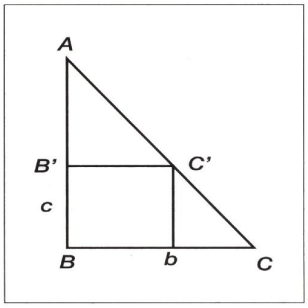
e) $f(x) = Ln(x^2 - 1)$

f) $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

23. Hallar las dimensiones del rectángulo de área máxima inscrito en un triángulo equilátero de lado a.

24. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $P = (2, 3)$ y forma con los ejes de coordenadas un triángulo de área mínima situado en el primer cuadrante.

25. En un triángulo rectángulo de catetos b y c se inscribe un rectángulo de forma que uno de sus vértices coincida con el ángulo recto, tal como indica la figura. Hallar las dimensiones del rectángulo de área máxima.



26. Entre todos los triángulos isósceles con perímetro constante, hallar el de área máxima.

27. Una fábrica tiene que fabricar recipientes de base cuadrada abiertos con una capacidad de 4 000 litros. Calcular las dimensiones que debe tener cada recipiente para que el coste sea el mínimo posible.

28 Un cultivador de lechugas tiene la siguiente información: si vende hoy mismo su cosecha, podrá recolectar 50 000 lechugas por las cuales recibiría 20 céntimos por unidad. Además sabe que por cada día que espere, la cosecha de lechugas disminuirá en 800 unidades, pero aumentará el precio en 0.8 céntimos la unidad. ¿Cuántos días será necesario que espere el agricultor para obtener el mayor beneficio posible?

29 Consideremos la función $f(x) = e^{-1/x}$. Se pide:

a) Estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento.
b) ¿Tiene extremos relativos?
c) Estudiar la concavidad y convexidad.
d) ¿Tiene puntos de inflexión?

30. Determinar los valores de los parámetros a y b para que la función $f(x) = x^2 + ax + b$ alcance su valor mínimo en el punto (1, 3).

31.- Halla el valor de los siguientes límites:

a) $\lim_{h \to 0} \frac{sen\, x}{x}$

b) $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - 3}{e^x + 3}$

c) $\lim_{x \to 0} \frac{x^3}{sen\, x - x}$

d) $\lim_{x \to \frac{h}{2}} (tg\, x - sec\, x)$

e) $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(x+1)}$