ESPACIOS VECTORIALES Y GEOMETRÍA AFÍN

1.- Indica cuáles de los siguientes subconjuntos son subespacios vectoriales:

$A=\{(x,y,z)\in \mathbb{R}^3 / x-y=1\}$

$B=\{(x,y,z)\in \mathbb{R}^3 / x^2+y^2+z^2=0\}$

2.- Estudia si los vectores u=(1,1,1), v=(2,1,0) y w=(1,0,1). Son linealmente independientes. ¿Forman una base de $\mathbb{R}^3$?

3.- Halla las coordenadas del vector v=(3,-1,1) respecto a la base B={(2,0,1), (1,1,-1), (0,0,2)}

4.- En el espacio vectorial de $\mathbb{R}^3$ se consideran los vectores u=(1,2,-1); v=(1,-1,1) y w=(2,5a,3a).

a) Halla un valor de a para que los tres vectores sean linealmente independientes.
b) Halla un valor de a para que sean dependientes.
c) Halla un valor de a para que los tres vectores sean un sistema generador de $\mathbb{R}^3$.

5. Hallar las ecuaciones de una recta que pasa por $A=(1, 2, 3)$ y por el punto medio del segmento de extremos $B=(-1, 1, 1)$ y $C=(2, 3, 4)$.

6.-Averiguar si estos puntos son colineales:

a) $A=(0, 3, 4)$, $B=(1, 1, 1)$, $C=(-1, 5, 7)$.

b) $A=(5, 3, 2)$, $B=(2, 1, 4)$, $C=(1, 1, 1)$.

7.-Determinar los valores de a y b para que los siguientes puntos sean colineales:

$$A=(1, 1, 1);\ B=(2, a, -1);\ C=(b, -1, -1)$$

8.-Estudiar la posición relativa de los siguientes pares de rectas:

a) $r \equiv (x, y, z)=(1, 1, 1)+\lambda(1, 2, 3),\ \lambda \in R$

$$s \equiv \begin{cases} x=2+2\mu \\ y=3+4\mu \\ z=1+6\mu \end{cases} \qquad \mu \in R$$

b) $r \equiv \begin{cases} x=2+\lambda \\ y=3+2\lambda \\ z=5+3\lambda \end{cases} \qquad \lambda \in R$

$$s \equiv \frac{x+1}{3}=\frac{y+1}{-5}=\frac{z-2}{2}$$

c) $r \equiv \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-2}{1}$

$$s \equiv \begin{cases} x=1-\mu \\ y=2+2\mu,\ \mu \in R \\ z=8+5\mu \end{cases}$$

d) $r \equiv (x, y, z)=(1, 2, 3)+\lambda(1, 1, 1),\ \lambda \in R$

$$s \equiv \begin{cases} x-z+3=0 \\ x-z+1=0 \end{cases}$$

9. Estudiar la posición relativa de los siguientes pares de planos:

a) $\pi_1: x - y + z + 1 = 0;\ \pi_2: 3x + 2y - z + 4 = 0.$

b) $\pi_1: x + y + z - 3 = 0;\ \pi_2: -2x - 2y - 2z + 5 =$

10. Estudiar la posición relativa de las siguientes rectas y planos:

a) $\pi: x + y + z - 1 = 0\ ;\ r \equiv \begin{cases} x = 3 - 2\lambda \\ y = 4 + \lambda \\ z = 2 + \lambda \end{cases} \quad \lambda \in R$

b) $\pi: 2x - y + 3z + 1 = 0\ ;\ r \equiv \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-8}{-1} = \dfrac{z-1}{-1}$

c) $\pi: 2x + y + 4z - 1 = 0\ ;\ r \equiv \begin{cases} x = 1 + 3\lambda \\ y = -1 + \lambda \\ z = 3 + 4\lambda \end{cases} \quad \lambda \in R$

d) $\pi: x + 2y - 3z + 1 = 0\ ;\ r \equiv \begin{cases} x + y - z + 3 = 0 \\ 2x - y + 3z - 1 = 0 \end{cases}$

11. Estudiar la posición relativa de los planos:

a) $\pi_1: x + y + z = 0$
$\pi_2: x - y + 2z - 1 = 0$
$\pi_3: x + 3y - 2z - 2 = 0$

b) $\pi_1: x + 2y - z + 1 = 0$
$\pi_2: -2x + 3y + z - 2 = 0$
$\pi_3: -x + 5y - 1 = 0$

c) $\pi_1: x - y + 3z = 0$
$\pi_2: 2x + y + 4z - 1 = 0$
$\pi_3: 3y - 2z + 1 = 0$

d) $\pi_1: x + y - 3z + 1 = 0$
$\pi_2: 2x + 2y - 6z + 2 = 0$
$\pi_3: -5x - 5y + 15z + 3 = 0$

12. Calcular la ecuación del plano que pasa por los puntos:

$$A = (1, 1, 1),\ B = (-1, 2, 4) \text{ y } C = (3, 2, 5)$$

13. Hallar la ecuación del plano que pasa por los puntos $A = (1, 1, 1)$, $B = (2, 1, 3)$ y el punto de intersección de la recta:

$$r \equiv \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 - \lambda \\ z = 3 + \lambda \end{cases} \text{ con el plano } \pi: x + 2y - z + 3 = 0$$

14. Calcular la ecuación del plano que contiene a la recta que pasa por los puntos $A = (1, 1, 1)$, $B = (0, -1, 2)$ y es paralelo a la recta que pasa por los puntos $C = (2, 3, -1)$ y $D = (4, 5, -1)$.

15. Estudiar la posición relativa de los planos según los valores que tome $m \in R$:

$$\pi_1: mx + y + z = 1$$
$$\pi_2: x + my + z = 1$$
$$\pi_3: x + y + mz = 1$$

16. Estudiar según los posibles valores de m, la posición relativa de la recta:

$$r \equiv \frac{x}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-1}{3} \text{ y el plano } \pi: mx - y - \lambda z - 1 = 0$$

17. Calcular la ecuación de la recta que pasa por el punto $A = (1, -1, 2)$ y es paralelo a la recta:

$$r \equiv \begin{cases} x + y + 2z - 1 = 0 \\ 2x - y + z + 2 = 0 \end{cases}$$

18. Hallar el valor que debe tomar el parámetro m para que los puntos:

$$A = (m, 2, -3)$$

$$B = (2, m, 1)$$

$$C = (5, 3, -2)$$

estén alineados, y hallar las ecuaciones de la recta que los contiene para dicho valor.

19. Estudiar si los puntos:

$$A = (2, -1, 0)$$

$$B = (3, 0, 1)$$

$$C = (-1, 2, 1)$$

están alineados. A continuación, calcular a y b para que el punto $D = (a, b+1, 2)$ pertenezca a la recta AB.

20. Halla la condición para que las rectas:

$$r \equiv \begin{cases} x = 2 + az \\ y = 3 + z \end{cases}$$

$$s \equiv \begin{cases} x = 1 + 2z \\ y = b - z \end{cases}$$

sean coplanarias.

21. Estudiar la posición relativa del plano:

$$\pi \equiv x + ay - z = 1$$

y la recta:

$$r \equiv \begin{cases} 2x + y - az = 2 \\ x - y - z = a - 1 \end{cases}$$

según los valores del número real a.

22. Determinar la ecuación de un plano que pase por los puntos de coordenadas (1, 1, –1), (2, 0, 3) y (–1, 4, 1).

23. Dar un ejemplo de dos rectas secantes cuyos vectores directores sean el (1, 1, 0) y el (2, –1, 1).